УДК 517.1

АЛГЕБРАЛЫҚ ТЕҢСІЗДІКТЕРДІ ШЕШУ МЕН ДӘЛЕЛДЕУДІҢ ӘДІС - ТӘСІЛДЕРІ

Тәңірберген А.Н.
- 6В01508- Қолданбалы математикалық модельдеу мамандығының 4 курс студенті,
aiaulimtanirbergen@mail.ru
ғылыми – жетекші: **Утепқалиев С.У**. - Х.Досмұхамедов атындағы Атырау университетінің профессоры.
Serik.Utepkaliyev@mail.ru

Аннотация: Мақалада алгебралық теңсіздіктерді шешу, дәлелдеу әдіс - тәсілдері көрсетілген. Теңсіздіктерді шешудің және дәлелдеудің интервалдар, функционалды - графикалық, геометриялық, векторлық, бағалау және функция қасиеттерін пайдалану әтістері баяндалған. Функцияның ең кіші, ең үлкен мәндерін табуға арналған және функция туындысын қолданып дәлелдеу мысалдары келтірілген.

Кілт сөздер: Теңсіздік және олардың жүйесі. Аналитикалық, геометриялық, функцияның қасиеттері әдістері, теңсіздіктердің шешімдерінің геометриялық интерпретациясы.

Теңсіздіктер математиканың әртүрлі салаларында маңызды рөл атқарады, себебі олар бір шаманың екіншісіне тең, үлкен немесе кіші болатын салаларды табуға қатысты есептерді шешуге мүмкіндік береді.

Теңсіздіктерді шешу, теңсіздіктерді дәлелдеу қатысты есептер мектептердегі дәстүрлі білім беру есептерінің ең қиын және қызықтыларының бірі болып табылады. Теңдеулер мен теңсіздіктерді шешу, дәлелдеу үшін қолданылатын идеялар әртүрлі.

Теңсіздіктерді және олардың жүйелерін шешу, дәлелдеу кезінде аналитикалық немесе геометриялық тәсілді қолдануға болады. Теңсіздіктерді шешу, дәлелдеу барысында аналитикалық тәсілімен теңсіздіктің сол және оң жақтарының айырмашылығының белгісін табу жеткілікті және нәтижеге байланысты қорытынды жасау керек. Нақты жағдайларда жалпы шешім әдістері көбінесе қарастырылып отырған есептердің көп еңбекті қажет ететін шешмдеріне әкеледі.

Теңсіздіктің шешім жиынын геометриялық түсіндіру, сондай-ақ жиындардың қиылысу және бірігу ұғымдарын пайдалану аналитикалық тәсілмен күрделі, ұзақ және түсіну қиын есептеулерге әкелетін теңсіздіктер қатысты есептерді шешуге көмектеседі.

Теңсіздіктердің және олардың жүйесін шешу мен дәлелдеудің әртүрлі әдіс-тәсілдері бар:

- интервалдар әдісі,
- жаңа айнымалылар енгізу,
- функционалды – графикалық,
- мәндес теңдеулер, теңсіздіктер әдісі,
- берілген шарттардыдың екі бөлігін бірдей дәрежеге шығару,
- бағалау әдісі,
- белгілі теңдеулерге келтіру, белгілі теісіздіктерді қолдан,
- векторлық алгебраны қолдану әдісі,
- математикалық талдау теориясын қолдану әдісі,
- геометриялық интерпретация әдісі

т.б.

Теңсіздіктерді шешу мен дәлелдеуге арналған үшін геометрияны қолданудың әдістемесін қарастыралық. Көптеген алгебра есептерін аналитикалық жолмен шешуде қиындық тууы мүмкн. Алайда, берілген таңдеулер және теңсіздіктер, олардың жүйесін, мәтінді есептер және өрнектердің, функцияның ең үлкен, ең кіші мәндерін табуға арналға және т.б. алгебралық есептерді геометриялық интерпретациясын салу, емесе геометрия теориясы арқылы шешуге болады. Геометриялық жолмен шешу - есеп шарттарын сурет немесе диаграмма түрінде көрнекі бейнелеу, яғни есептің шартының геометриялық интнрпретациясын көрсету.

Алдымен, біз теңсіздіктерді шешуге немесе дәлелдеуге қатысты негізгі қадамдарды сипаттаймыз. Бұл тәсілді келесідей көрсетуге болады:

Шешу: Берілген теңсіздікті сандық дұрыс теңсіздікке айналдыратын х-тің мәнін табу.	*Шешу*: Барлық қажетті шешімдерді іздестірі немесе негіздеу.	*Мәндес теңсіздіктер*: Бірдей шешімдер санына ие болатын.

Теңсіздік

Қарама - қарсы таңбамен теңсіздіктің бір жағынан екінші жағына шығаруға болады.	Теңсіздіктің (теңдеуді) екі жағында бір теріс емес санға көбейтуге (бөлуге) мүмкін болады.	Теңсіздіктің екі жағында бір теріс санға көбейтуге (бөлуге) мүмкін болады, бұл жағдайда теңсіздік таңбасы қарама – қарсыға алмастырылады.

Геометриялық әдістер таза аналитикалық белгілеу қиын болатын зерттеу нәтижелерін ұсыну үшін тиімді қолданылады. Графикалық әдістерді жүйелі қолдану нәтижесінде білімалушылар мұндай диаграммаларды қолдануға үйренеді.

Теңсіздіктерді шешуге графикалық тәсілдің негізгі құндылығы - функция графиктерінің схемалық көрінісі де теңсіздіктің графиктердің қиылысу нүктелері немесе у = f(x) графигінің х немесе у өстерімен қиылысу нүктелері сияқты сипаттамалық нүктелермен шектелген аралықтарда орындалатынын көрсетеді. Бұл нүктелерді табу біршама оңайырақ міндет: ол теңдеулерді шешуге дейін азаяды. Бұл әдістің маңызды ерекшеліктері - геометриялық ұғымдар және геометриялық фигуралардың қасиеттерін көрсететін геометриялық заңдар. Геометриялық әдістер қозғалысқа, жұмысқа, тригонометрияға қатысты, өрнектердің ең үлкен және ең кіші мәндерін есептеуге және параметрлермен берілген теңсіздіктерді және олардың жүйелерін шешуге берілген есептерді шешу үшін қолданылады.

Теңсіздіктерді алгебралық есептерді көптеген түрлеріне қолдануға болады: функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табуға, параметрлі және көптеген геометриялық есептерді шығаруда қолданылады.

Мысал 1. Функцияның ең кіші мәнің табыңдар:

$$y = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 16x + 89}.$$

Шешуі. Бұл есепті туындыны пайдаланып шешу көп есептеуді қажет етеді. Есепті басқаша тұжырымдап көрейік. Бірінші түбір - х өсінің нүктесінен -ге B(1, -2) немесе (1, 2) бекітілген координаталары бар нүктелердің біріне дейінгі қашықтық, ал екінші түбір - х өсінің сол нүктесінен C(8, 5) немесе (8, -5) нүктелерінің біріне қашықтық екенін көру оңай. Ал y(x) функциясының мәні BA + AC = A + AC қашықтықтарының қосындысына тең (B және C нүктелерінің х өсіне қатысты симметриясына байланысты). Сондықтан, функцияның ең кіші мәнін табу үшін, осы нүктеден осы нүктелерге дейінгі қашықтықтардың қосындысы минималды болатындай х өсінің нүктесін табу жеткілікті. B және C нүктелері х өсінің қарама-қарсы жағында орналасқандықтан, біз іздеп отырған А нүктесі ВС түзуінің Ох өсімен қиылысуы деп есептей аламыз. Әйтпесе, қашықтықтардың қосындысы үшбұрыш теңсіздігінен келесідей үлкен болады. және нүктелерін қарастырған кезде де солай ойлаймыз. ВС түзуінің теңдеуін екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі ретінде жазамыз, содан кейін оның y = 0 кезінде көлбеу болатын х өсімен қиылысуын табамыз. Берілген теңдеуі бар түзудің В және С нүктелері арқылы өтетінін тексеру оңай. y = 0 кезінде көлбеу болатын OX түзуінің x координатасын табамыз. Сонда ең кіші қашықтық $7\sqrt{2}$-ге тең болады:

$$\sqrt{(3-1)^2+4} + \sqrt{(3-8)^2+4} = 7\sqrt{2}.$$

Сол сияқты екінші жағдайда үшін де осындай пайымдау жүргізіледі, яғни осы жауап алынады.

Мысал 2. 1<x<2 үшін $\sqrt{2-x} < x$ теңсіздігінің орындалатынын дәлелдеңіз.

Шешуі. y = x; y $=\sqrt{2-x}$ функцияларының графиктерін саламыз. Біріншісі түзу сызық, ал екіншісі параболаның жоғарғы жарты жазықтықта жатқан бөлігі. Берілген теңсіздік (a;2) аралығында орындалатыны.

Арифметикалық квадрат түбірдің анықтамасы бойынша,

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 2 - x \end{cases}$$

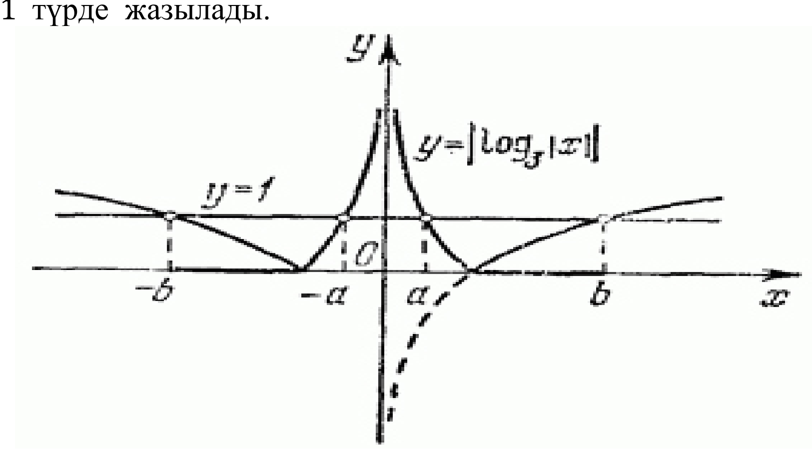
$$x^2 + x - 2 = 0,\ x_1 = -2, x_2 = 1.$$

$x_1 = -2$ мәні шартты қанағаттандырмайды, ал $x_2 = 1$ есеп шартын қанағаттандырады. Демек, a = 1.

3-мысал. $\frac{1}{3} \leq x \leq 3$ үшін. теңсіздіктің орындалатынын дәлелдеңіздер:

$$\left|log_3|x|\right| \leq 1.$$

Шешуі. Функциясының графигін салымыз (1-сурет). Пунктир сызық функцияның графигін, ал тұтас сызық y = log3x графигін көрсетеді. Әрі қарай y = 1 түзуі салынады. Сонда бұл теңсіздік екі симметриялық аралықтан x мәндерімен қанағаттандырылатыны бірден айқын: (- b; - a), (a; b). Мұндағы a және b функцияның графигімен y = 1 түзуінің қиылысу нүктелерінің абсциссаларын, яғни теңдеудің шешімдерін білдіреді, яғни $\left|log_3|x|\right| = 1$ теңдеуінің теңдеуінің түбірлері.
Симметрияның арқасында x>0 үшін теңдеудің түбірлерін табу жеткілікті. Демек, теңдеу $|log_3 x| = 1$ түрде жазылады.



1-сурет. Теңсіздік шешімінің графикалық көрінісі.

x> 1 болғанда $|log_3 x| = log_3 x$ және $log_3 x$ = 1, x = 3.

x< 1 болғанда $|log_3 x| = -log_3 x$ және $log_3 x$ = -1, x = $\frac{1}{3}$.

Бұл теңсіздіктің шешімдер жиыны симметриялық аралықтардың жұбы екені анық. Демек, $a = \frac{1}{3}$, b = 3 және берілген теңсіздіктің шешімдер жиыны екі симметриялы аралықтар: $(-3; -\frac{1}{3})$ және $(\frac{1}{3}; 3)$.

Математиканың әрбір саласында іргелі нәтижелерді теңсіздіктер ретінде тұжырымдауға болады. Математиканың кейбір салаларында теңсіздіктер теңдіктерге қарағанда жиі кездеседі. Кейбір практикалық маңызды теңсіздіктердің шешімі сан немесе сандар жиынтығы немесе формула түрінде табылады деп айтуға болады.

Геометриялық тәсілді қолданудағы негізгі қиындық - шешім қадамдарының айқын еместігі. Бұл мақалада қарастырылатын теңсіздіктердің стандартты аналитикалық шешімдері бар, бірақ бұл шешімдер өте көп еңбекті қажет етеді. Дегенмен, геометриялық ойларды қалай пайдалану керектігін болжау оңай емес, сондықтан геометриялық тәсілдің орындылығы әдістемелік негізде зерттеуді қажет етеді.

Теңсіздіктерді дәлелдеудің векторлық әдісі алгебралық өрнекті вектор ұзындықтары және олардың скалярлық көбейтінділері арқылы көрсетуді қамтиды, көбінесе Коши-Буняковскийдің векторлық теңсіздігі $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \le |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2$ немесе үшбұрыш теңсіздігі $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| \le |\vec{a}| + \left|\vec{b}\right|$ қолданылады.

Бұл әдіс теңсіздіктерді векторлар тіліне аудару арқылы геометриялық тұрғыдан негіздеуге мүмкіндік береді.

4-мысал. x, y, z сандары үшін x + y + z = 1 орындалады. Дәлелдеңіздер:

$$\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{4z+1} < 5, \text{ мұнда } x, y, z \ge -\frac{1}{4}.$$

Шешуі. Координаталары мынадай болатын екі ыекторды қарастыралық:

$$\vec{m}(\sqrt{4x+1}; \sqrt{4y+1}; \sqrt{4z+1}), \vec{n}(1; 1; 1).$$

Коши-Буняковский теңсіздігі бойынша аламыз:

$$|\vec{m}\cdot\vec{n}|^2 \le |\vec{m}|^2 \cdot |\vec{n}|^2, \text{ бұдан } |\vec{m}\cdot\vec{n}| \le |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \Rightarrow$$

$$\sqrt{4x+1}\cdot 1 + \sqrt{4y+1}\cdot 1 + \sqrt{4z+1}\cdot 1 \le \sqrt{4x+1+4y+1+4z+1}\cdot\sqrt{1^2+1^2+1^2} =$$

$$= \sqrt{4(x+y+z)+3}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{7\cdot 3} = \sqrt{21} < 5.$$

Функциялардың қасиеттері теңсіздіктердің шешімдерін табу нмесе дәлелдеу үшін қолданылатын жағдайлар көп. Теңсіздіктерге кіретін функциялардың қасиеттерін қолдану теңсіздіктерді шешуге немесе дәлелдеуге графикалық-геометриялық тәсілді қолдануға мүмкіндік береді. Теңсіздіктерді шешу немесе дәлелдеу кезінде функциялардың қажетті қасиеттерін қалай пайдалану керектігін білу тиімдірек шешім әдісін таңдауға мүмкіндік береді.

5-мысал. Теңсіздікті дәлелдеңдер: $\sqrt{sinx} < \sqrt{1-|x|+sinx}$.

Шешуі. Берілген теңсіздіктің анықталу жиыны

$$\begin{cases} sinx \ge 0, \\ 1-|x|+sinx \ge 0, \\ sinx < 1-|x|+sinx \end{cases}$$

теңсіздіктер жүйесінің шешімдер жиыны болып табылады.

Жүйенің үшінші теңсіздігінің шешімі $-1 < x < 1$. Пірінші және екінші теңсіздіктер тек $0 \le x < 1$ аоалығында орынды болады. Демек, соңғы теңсіздік ізделінді анықталу жиыны болады.

Теңсіздіктерді дәлелдеуге үшін функцияның туындысын қолдануға болады. Функцияның туындысының көмегімен берілген теңсіздіктің құрамындағы функцияларды зерттеу арқылы сол функциялардың монотондылық және шектелгендік қасиеттері қолданылады. Сол сияқты теңсіздікте дәлелдеуде Лагранж теоремасы қолданылады.

6-мысал. $\sqrt{1+x} \le 1 + \frac{1}{2}x$, $x > 1$, теңсіздігін дәлелдеңдер..

Шешуі. $f(x) = \sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x$ функциясын қарастыралық және оның туындысы

$$f'(x) = \frac{1-\sqrt{1+x}}{2} \le 0 \text{ барлық } x > 0 \text{ үшін.}$$

f(0) = 1- 0 -1 = 0 екенін ескеріп, аламыз, барлық x> 0 үшін $f'(x) \leq 0$ болатынын байқаймыз, демек,бұл функция x> 0 мәндерде кемімелі, яғни

$$\sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + - \frac{1}{2}x.$$

7-мысал. Теңсәздікті дәлелдеңдер: $\frac{b-a}{b} \leq ln\frac{b}{a} \leq \frac{b-a}{a}$.

Шешуі. f(x) = lnx функциясын қарастырып. Оған $[a;\ b]$ кесіндісінде Логранж формуласын қолданалы: $\frac{lnb-lna}{b-a}$ = f′(c), c∈ $(a;b)$.

Сонда : $\frac{lnb-lna}{b-a} = \frac{1}{c}$, ln$\frac{b}{a} = \frac{b-a}{c}$. Бұл теңсіздіктің оң бөлігі c=b болғанда минимум мәнге ие болады. Сондықтан аламыз: $\frac{b-a}{b} \leq ln\frac{b}{a} \leq \frac{b-a}{a}$.

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Алгебра: Учебник для общеобразовательных учреждений 9 класса. //А. Г. Мордкович. – М.: Мнемозина, 2019.г., стр.335.
2. Дидактические материалы по алгебре для 9 класса.. // Б.М. Ивлев, С.М. Саакян, С.И.Шварцбурд. – М.: Просвещение, 2018.г., стр.143.
3. Система тренировочных задач и упражнений по математике. // Симонов А.Я., Бакаев Д.С., Эпельман А.Г. и др. – М.: Просвещение, 2020.г.; стр. 208.
4. Вавилов В.В., Задачи по математике. Уравнения и неравенства. . // В.В.Вавилов. - М.: Книга по требованию, 2018.г., стр. 37.
5. Вавилов В.В., Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Справочное пособие. // В.В.Вавилов, И.И.Мельников, С.Н.Олехник - М.:Машиностроение, 2007 г.; стр. 240..
6. Власова А.П., Логарифмические и показательные уравнения, неравенства, системы уравнений. 10-11 классы. // А.П.Власова, Н.И.Латанова. - М. Дрофа, стр. 2017. - 490.
7. Гейдман Б.П., Логарифмические и показательные уравнения и неравенства . // Б.П.Гейдман. - М.: МЦНМО, 2016.г.; стр.185.